INTEGRAL-Z

Siti Khabibah, Farikhin, Bayu Surarso
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang, 50275

Abstrak: Konsep mengenai integral-Z terkait dengan keberadaan derivatif kuat. Suatu fungsi F yang terderivatif kuat pada [a,b] dinotasikan dengan $F^s(x)$. Jika dipenuhi suatu fungsi f sedemikian sehingga $F^s(x)=f(x)$ maka f akan terintegral-Z pada [a,b]. Syarat cukup dan perlu suatu fungsi terintegral-Z adalah bahwa fungsi tersebut haruslah kontinu.

Kata Kunci: Derivatif kuat, Integral-Z

PENDAHULUAN

Dalam teori dasar Kalkulus dikenal beberapa teori mengenai integral, antara lain integral Newton, integral Riemann, dan integral Lebesgue.

Pada peralihan abad ke-19 para Matematikawan berpendapat bahwa sifat fungsi-fungsi kontinu dan teori integral Riemann tidak cukup untuk dapat menyelesaikan permasalahan-permasalahan analisis. Kemudian sekitar awal abad ke-20 diperkenalkan suatu teori ukuran yang mendasari konsep integral Lebesgue. Integral Lebesgue sendiri tepatnya diperkenalkan pada tahun 1902. Sepuluh tahun kemudian matematikawan Perancis, A.Denjoy, menyajikan pengitlakan teori integral Lebesgue yang dikenal dengan teori integral Denjoy Khusus. Pada tahun 1960 Ralph Henstock memperkenalkan suatu definisi integral yang diberi nama integral Henstock.

Pada penulisan tugas akhir ini akan dibahas mengenai teori integral yang berkaitan dengan derivatif kuat yaitu integral-Z. Teori ini diperkenalkan oleh Lu Shipan pada awal abad ke-21.

DERIVATIF KUAT

Sebelum konsep integral-Z dibahas lebih jauh, terlebih dahulu akan diperkenalkan suatu derivatif yang berhubungan dengan konsep integral-Z yaitu derivatif kuat.

Definisi 1. Diberikan $F:[a,b]\rightarrow R$ dan $x_0\in[a,b]$. Fungsi F(x) dikatakan terderivatif kuat ke $F^s(x_0)$ di x_0, jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$ berlaku

$$\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-F^s(x_0)\right|<\varepsilon$$

Bilangan $F^s(x_0)$ disebut nilai derivatif kuat di x_0.

Contoh 2 :
Diberikan $F:[-1,1]\rightarrow R$ dengan $F(x)=x$.Tunjukkan bahwa $F(x)$ terderivatif kuat di $x=0$ dan $F^s(0)=1$.
Penyelesaian :
Ambil sebarang $\varepsilon>0$ dimana terdapat $\delta=\varepsilon$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\subset(-\delta,\delta)$ berlaku

$$\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-1\right|=\left|\frac{v-u}{v-u}-1\right|=|1-1|=0<\varepsilon$$

Karena $[u,v]$ sebarang maka terbukti F terderivatif kuat di $x=0$ dan $F^s(x)=1$.♥

Teorema 3. Diberikan $F:[a,b]\rightarrow R$ dan $x_0\in[a,b]$, jika $F^s(x_0)$ ada maka nilai $F^s(x_0)$ tunggal.

Teorema 4. Diberikan $F,G:[a,b]\rightarrow R$ fungsi yang terderivatif kuat di $x_0\in[a,b]$ maka

a. fungsi αF terderivatif kuat di x_0 untuk setiap $\alpha\in R$ dan
$$(\alpha F)^s(x_0)=\alpha F^s(x_0)$$
b. fungsi F+G terderivatif kuat di x_0 dan
$$(F+G)^s(x_0)=F^s(x_0)+G^s(x_0)$$
c. fungsi FG terderivatif kuat di x_0 dan
$$(FG)^s(x_0)=F^s(x_0)G(x_0)+F(x_0)G^s(x_0)$$

Teorema 5. Diberikan $F:[a,b]\rightarrow R$ dan $x_0\in[a,b]$, jika $F^s(x_0)$ ada maka $F'(x_0)$ ada dan $F^s(x_0)=F'(x_0)$.

SIFAT DASAR INTEGRAL-Z

Dalam pembahasan mengenai konsep integral-Z fungsi yang dibicarakan adalah fungsi yang kontinu yang bernilai real dan didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas. Suatu partisi P pada selang $[a,b]$ adalah suatu himpunan berhingga $\{a=x_0,x_1,\ldots\ldots,x_n=b\}$ sedemikian sehingga $a=x_0<x_1<\ldots\ldots<x_n=b$. Fungsi $f:[a,b]\to R$ dikatakan **monoton naik** pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x,y\in[a,b]$ dengan $x<y$ berlaku $f(x)\leq f(y)$. Fungsi $g:[a,b]\to R$ dikatakan **monoton turun** pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x,y\in[a,b]$ dengan $x<y$ berlaku $g(y)\leq g(x)$.
Fungsi $f:[a,b]\to R$ dikatakan **terintegral-Z pada** $[a,b]$, $f\in Z[a,b]$,jika terdapat fungsi $F:[a,b]\to R$ sedemikian sehingga $F^s(x)=f(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Nilai integral-Z dari f pada $[a,b]$ ditulis

$$Z\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Contoh 6 :
Diberikan fungsi $f:[-1,1]\to R$ dengan $f(x)=1$ untuk setiap $x\in[-1,1]$. Tunjukkan bahwa fungsi $f\in Z[-1,1]$ dan

$$Z\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$$

Penyelesaian:
Didefinisikan fungsi $F:[-1,1]\to R$ dengan $F(x)=x$ untuk setiap $x\in[-1,1]$, sehingga dipenuhi $|F(x)-F(y)|=|x-y|$ untuk setiap $x,y\in[-1,1]$. Mengingat contoh 2 maka $F^s(x)=f(x)$ pada$[-1,1]$. Jadi fungsi $f\in Z[-1,1]$ dan $Z\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1)-F(-1)=2$.♥

Teorema 7. Fungsi $f:[a,b]\to R$ dan $f\in Z[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal.

Teorema 8. Fungsi $f:[a,b]\to R$ dan $f\in Z[a,b]$ maka $f\in Z[c,d]$ untuk setiap $[c,d]\subseteq[a,b]$.

Teorema 9. Diberikan $f:[a,c]\to R$. Jika $f\in Z[a,b]$ dan $f\in Z[b,c]$ maka $f\in Z[a,c]$ dan berlaku $Z\int_a^c f(x)dx = Z\int_a^b f(x)dx + Z\int_b^c f(x)dx$.

Teorema 10. Jika $f,g\in Z[a.b]$ dan $\alpha,\beta\in R$ maka $\alpha f+\beta g\in Z[a.b]$ dan $Z\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\, Z\int_a^b f(x)dx + \beta\, Z\int_a^b g(x)dx$.

Teorema 11. Diberikan fungsi $f,g\in Z[a.b]$. Jika $f(x)\geq g(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$ maka $Z\int_a^b f(x)dx \geq Z\int_a^b g(x)dx$.

SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP

Teorema 12. (Syarat Perlu). Jika $f\in Z[a,b]$ maka $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$.
Bukti :
Diketahui $f\in Z[a,b]$ berarti terdapat $F:[a,b]\to R$ dan $F^s(x)=f(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$ yaitu untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta_1>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\subset(x-\delta_1,x+\delta_1)$ berlaku

$$\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil sebarang $x_0\in(x-\delta_1,x+\delta_1)$. Karena $F^s(x_0)$ ada maka terdapat $\delta_2>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\subset(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$ berlaku

$$\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Jika $[u,v]\subset(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)\cap(x-\delta_1,x+\delta_1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-f(x_0)\right| &= \left|f(x)-\frac{F(v)-F(u)}{v-u}+\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x_0)\right| \\
&\le \left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x)\right| + \left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x_0)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

Dari uraian diatas, dipilih $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap x_0 dengan $\left|x-x_0\right|<\delta$ berlaku $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Hal ini berarti $f(x)$ kontinu di $x\in[a,b]$. Karena x sebarang elemen pada $[a,b]$ maka $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$. ♥

Teorema 13. (Syarat Cukup). Jika $f:[a,b]\to R$ kontinu pada [a,b] maka $f\in Z[a,b]$.

Bukti:

Diketahui f kontinu pada $[a,b]$ berarti f kontinu di setiap titik pada $[a,b]$. Ambil sebarang $x_0\in[a,b]$, untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x\in[a,b]$ dan $\left|x-x_0\right|<\delta$ berlaku $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka $f\in R[a,b]$ dan terdapat $F:[a,b]\to R$ dengan $F(x)=R\int_a^x f(t)dt$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Untuk δ yang sama dipilih sebarang $[u,v]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-\frac{f(x_0)(v-u)}{v-u}\right| \\
&= \frac{1}{v-u}\left|F(v)-F(u)-f(x_0)(v-u)\right| \\
&= \frac{1}{v-u}\left|R\int_u^v f(x)dx - R\int_u^v f(x_0)dx\right| \\
&= \frac{1}{v-u}\left|R\int_u^v (f(x)-f(x_0))dx\right| \\
&\le \frac{1}{v-u}\, R\int_u^v \left|f(x)-f(x_0)\right|dx \\
&< \frac{1}{v-u}\, R\int_u^v \varepsilon dx = \varepsilon
\end{aligned}$$

Karena $[u,v]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$ maka $f\in Z[a,b]$.♥

Dari kedua teorema diatas dapat dibentuk suatu teorema baru yaitu

Teorema 14. Diberikan $f:[a,b]\to R$, maka $f\in Z[a,b]$ jika dan hanya jika f kontinu pada [a,b].

Teorema 15. Fungsi $f:[a,b]\to R$,$f\in Z[a,b]$ maka $f\in R[a,b]$ dan berlaku $R\int_a^b f(x)dx = Z\int_a^b f(x)dx$

Teorema 15 tidak berlaku sebaliknya, yakni suatu fungsi yang terintegral Riemann belum tentu terintegral-Z.

TEOREMA KEKONVERGENAN

Dalam mempelajari teori integral masalah yang cukup menarik untuk diteliti adalah kekonvergenan barisan fungsi yang terintegral. Pada teori integral-Z dikenal satu teorema kekonvergenan yaitu

Teorema 16. (Teorema Kekonvergenan Seragam). Diketahui $f_n:[a,b] \to R$, $f_n \in Z[a,b]$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ seragam pada [a,b] maka $f \in Z[a,b]$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$.

Bukti :

Diketahui 1) $f_n \in Z[a,b]$, maka menurut Teorema 14 f_n kontinu.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *seragam* pada $[a,b]$

Dari 1) dan 2) maka f kontinu pada $[a,b]$.

Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka $f \in Z[a,b]$.

Diketahui $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *seragam* pada $[a,b]$ maka berlaku kriteria Cauchy yaitu untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap $m,n \geq n_0$ dan untuk setiap $x \in [a,b]$ berlaku $\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$.

$f_n \in Z[a,b]$ maka terdapat fungsi primitif $F_n(x) = \int_a^x f_n dx$.

Akan dibuktikan $\{F_n(x):\ n=1,2,3,\ldots\ldots\}$ barisan bilangan Cauchy

$$\left|F_n(x) - F_m(x)\right| = \left| Z\int_a^x f_n(x)dx - Z\int_a^x f_m(x)dx \right|$$

$$= \left| Z\int_a^x (f_n(x) - f_m(x))dx \right|$$

$$\leq Z\int_a^x \left| f_n(x) - f_m(x) \right| dx$$

$$< \varepsilon(x\text{-}a)$$

Sehingga untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap $m,n\geq n_0$ dan untuk setiap $x\in[a,b]$ berlaku $\left|F_n(x) - F_m(x)\right| < \varepsilon(x-a)$. Hal ini berarti $\{F_n(x):\ n=1,2,3,\ldots\ldots\}$ Cauchy. Karena $\{F_n(x)\}$ Cauchy maka $\{F_n(x)\}$ konvergen, katakan $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. Karena x sebarang elemen pada [a,b] berarti $\{F_n\}$ konvergen ke F .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F^s(x)=f(x)$ yaitu untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\in[x\text{-}\delta,x+\delta]$ berlaku $\left|F(v) - F(u) - f(x)(v-u)\right| < \varepsilon(3+(v\text{-}u))$

Ambil sebarang $\varepsilon>0$ sehingga

$$\left|F(v) - F(u) - f(x)(v-u)\right| =$$

$$\left|F(v) - F_n(v) + F_n(v) - F_n(u) + F_n(u) - F(u) + f_n(x)(v-u) - f_n(x)(v-u) - f(x)(v-u)\right| \leq$$

$$\left|F(v) - F_n(v)\right| + \left|F_n(u) - F(u)\right| + \left|F_n(v) - F_n(u) - f_n(x)(v-u)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right|\left|v-u\right|$$

Untuk ε tersebut dan $x\in[a,b]$ diambil n_0 sedemikian sehingga untuk setiap $n\geq n_0$ berlaku

1) $\left|F_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon$

2) $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$

Untuk n_0 ini diambil $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\in[x\text{-}\delta,x+\delta]$ berlaku

$\left|F_n(v) - F_n(u) - f_n(x)(v-u)\right| < \varepsilon$, untuk setiap $n\geq n_0$

Sehingga diperoleh

$$\left|F(v) - F(u) - f(x)(v-u)\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon(v\text{-}u)$$

$$< \varepsilon(3+(v\text{-}u))$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $[u,v]\in[x\quad\delta,x+\delta]$ berlaku $\left|F(v) - F(u) - f(x)(v-u)\right| < \varepsilon(3+(v\text{-}u))$

Terbukti $F^s(x)=f(x)$.

Karena $F^s(x)=f(x)$ maka $F^s(x)= \lim_{n\to\infty} f_n$ dan $Z\int_a^b fdx = F(b)-F(a)$

$$= \lim_{n\to\infty} (F_n(b)-F_n(a))$$

$$= \lim_{n\to\infty} Z\int_a^b f_n dx . \heartsuit$$

Konklusi dari Teorema 16 tidak berlaku jika hanya $\lim_{n\to\infty} fn=f$ pada$[a,b]$.

KESIMPULAN

Dari pembahasan mengenai teori integral-Z dapat disimpulkan :

1. Fungsi $f,g:[a,b]\to$ R terintegral-Z pada $[a,b]$ dan $\alpha,\beta\in$R maka $\alpha f+\beta g$ terintegral-Z pada $[a,b]$ dan $Z\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha Z\int_a^b f(x)dx + \beta Z\int_a^b g(x)dx$.
2. Suatu fungsi $f:[a,b]\to$ R akan terintegral-Z pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f kontinu pada $[a,b]$.
3. Jika fungsi $f:[a,b]\to$ R terintegral-Z pada [a,b] maka $f:[a,b]\to$ R akan terintegral Riemann pada [a,b] dan tidak berlaku sebaliknya.
4. Integral limit suatu barisan fungsi $f_n:[a,b]\to$ R yang terintegral-Z pada [a,b] akan sama dengan limit integral barisan fungsi $f_n:[a,b]\to$ R jika $f_n:[a,b]\to$ R konvergen seragam ke fungsi $f:[a,b]\to$ R pada [a,b].

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Apostol, Tom M, *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc, USA, 1981.

[2]. Bartle, Robert G, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley and Sons. Inc, New York, 1992.

[3]. Bishop, Erret, *Foundation of Constructive Analysis*, McGraw-Hill. Inc, New York, 1967.

[4]. Farikhin, *Integral Denjoy Khusus pada [a,b]*, Skripsi, FMIPA UGM, 1998.

[5]. Purcell, Edwin J, *Kalkulus dan Geometri Analaitis*, Alih bahasa Drs. I Nyoman Susila, MSc, Jilid l, Edisi keempat, Erlangga, Jakarta, 1995.

[6]. Soemantri, R, *Analisis Real I*, PT. Karunika, Universitas Terbuka, 1993.

[7]. Yang Keren and Lu Shipan, *Strong Derivative and its Consequence*, Journal of Mathematics Study, Vol 27, China, 1994.